

Problemler

1. Düzlemde, birbirine homeomorf olmayan X_1, X_2 gibi öyle iki kompakt alt küme bulunuz ki $I = [0, 1]$ reel sayılar doğrusunun kapalı birim aralığını göstermek üzere $X_1 \times I$ ve $X_2 \times I$ homeomorf olsun.

2. Dört noktadan oluşan bir küme üzerinde, iki noktanın açık, diğer iki noktanın da kapalı olduğu minimal (açık kümelerin sayısı bakımından) topoloji konmuş olsun. Bu uzayın temel grubunu hesaplayınız ve evrensel örtüsünü inşa ediniz.

3. a) Düzlemde tüm üçgenlerin oluşturduğu uzayın içinde tüm dik üçgenlerden oluşan alt uzay bir deformasyon retraktı mıdır?

b) Tüm üçgenlerin uzayından bütün eşkenar üçgenlerin alt uzayı üzerine bir deformasyon retraksiyonu bulunuz.

4. Bağlantılı bir X manifoldu ve sürekli bir $f : X \rightarrow S^2$ dönüşümü alalım öyle ki S^2 küresi üzerindeki her x noktası için $f^{-1}(x)$ alt uzayı S^1 'e homeomorf olsun. $H_1(X, \mathbb{Z})$ ve $H_2(X, \mathbb{Z})$ ne olabilir?

5. $S^4 = \{x \in \mathbb{R}^5 \mid 1 = |x|\}$ kümesini düşünelim. S^4 ün her x noktası için, P_x düzlemi x 'e sürekli olarak bağımlı olacak biçimde, S^4 'e teğet iki boyutlu bir P_x afin düzlemi seçebilir miyiz?

6. Sayılabilir çoklukta noktası olan bir Hausdorff uzayı bağlantılı olabilir mi?

7. Kendisi bir homeomorfizma olmayıp $\mathbb{R}^2$ içindeki her noktanın $f : U \rightarrow f(U)$ bir homeomorfizma olacak biçimde bir U komşuluğuna sahip olduğu sürekli ve örten bir $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dönüşümü var mıdır?

8. a) n bir doğal sayı olmak üzere düzlemde $[0, n]^2$ karesini düşünelim. Her iki koordinatı da tam sayıdan farklı olan tüm noktaları silelim. Böylece geriye bir boyutlu bir hücre kompleksi kalır, bunu X ile gösterelim. Maksimal $k = k(n)$ sayısını bulunuz öyle ki her $X \rightarrow \mathbb{R}^1$ dönüşümü için k adet ters görüntüsü (ön görüntüsü) bulunan bir nokta vardır.

b) $[0, n]^3 \subset \mathbb{R}^3$ kümesinden tüm koordinatları tam sayıdan farklı olan bütün noktalar silinerek elde edilen iki boyutlu kompleksten $\mathbb{R}^2$ 'ye giden dönüşümler için aynı soru.

9. Öyle bir $f : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ daldırması (immersion) bulabilir miyiz ki üç boyutlu diskin $f = g|_{\partial D^3}$ koşulunu sağlayacak biçimde bir $g : D^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ daldırması bulunmasın.