

Saint-Petersburg Topoloji Olimpiyatı, 1-31 Ekim 2018.

Topoloji olimpiyatları 1 ve 31 Ekim tarihleri arasında yapılmaktadır. Ekipler 3 kişiden fazla olmamak üzere ekip çözümleri de kabul edilecektir. Her türlü materyal kullanılabilir. Ekip üyeleri dışında herhangi bir kişiden yardım almak yasaktır. Herhangi bir ödül yoktur. Bilinen çözümleri olmayan problemler mevcuttur. Kuralların tam listesini ve problemlerin en son versiyonunu (varsa düzeltmeler ve açıklamalarla birlikte)

<http://mathcenter.spb.ru/nikaan/olympiad/problems2018eng.pdf>

adresinde bulabilirsiniz.

1. a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ dönüşümü pozitif ve negatif eksenler üzerinde sınırsız olan sürekli ve birebir bir dönüşüm olsun.

Görüntü kümesinin tümleyeni bağlantılı olabilir mi?

b) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ dönüşümü görüntüsü her yerde yoğun olan sürekli ve birebir bir dönüşüm olsun. Görüntü kümesinin tümleyeni basit bağlantılı olabilir mi? (Diğer bir deyişle, her sürekli $S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus f(\mathbb{R})$ dönüşümü 2-boyutlu diskten $\mathbb{R}^3 \setminus f(\mathbb{R})$ kümesine giden sürekli bir dönüşüme genişletilebilir mi?)

2. a) $(0, 1) \subset \mathbb{R}$ açık aralığını I ile gösterelim. $f : I^2 \rightarrow \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$ bir diffeomorfizma olsun. $f(x \times I)$ eğrisinin uzunluğu en az 2 olacak biçimde bir $x \in I$ elemanının varlığını gösteriniz. (Diğer bir deyişle disk düzgün olarak eğrilerle folyanmıştır. Bu eğrilerden birinin uzunluğunun en az diskin çapı kadar olduğunu gösteriniz.)

b) $f : I^3 \rightarrow \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$ bir diffeomorfizma olsun. $x \in I$ olmak üzere $f(x \times I^2)$ biçimindeki kümelerin alanlarının supremumu üzerinde mümkün olan en küçük alt sınırı bulunuz.

3. a) Aşağıdakiler için tek sayıda ters görüntüsü olan bir regüler değere sahip sürekli bir $\mathbb{R}P^2 \rightarrow M$ dönüşümü var mıdır?

a) $M = S^2$; **b)** $M = S^1 \times S^1$

c) M bağlantılı, kapalı, yönlü bir 4-manifold olsun. $\mathbb{C}P^2 \rightarrow M$ sıfırdan farkı dereceye sahip sürekli bir fonksiyon olsun. M 'nin ikinci Betti sayılarının mümkün olan tüm değerlerini bulunuz. İkinci Betti sayısı $b_2(M)$ 'nin, M 'nin $X_1, X_2, \dots, X_r$ gibi r adet 2-boyutlu alt uzayları olacak ve $X_i \cdot X_j$ kesişim çarpımlarından oluşan matrisin rankı ona eşit olacak maksimal r olduğunu hatırlayınız.

4. G çizgesi(grafi) birim küre $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ üzerinde G_1, G_2 gibi iki değişik şekilde çizilen bir çizge olsun öyle ki her G_i kürenin merkezine göre merkezi olarak simetrik olsun, herhangi iki ayrıt(kenar) bir iç noktada kesişmesin ve hiç bir ayrıt herhangi bir düğümden (köşeden) geçmesin. G_i 'lerden merkezi simetriye göre bölerek (faktörize ederek) elde edilen iki çizge izomorf mudur?

($\mathbb{R}P^2$ içine gömülen iki çizgenin iki katlı $S^2 \rightarrow \mathbb{R}P^2$ örtü projeksiyonu altındaki ters görüntüleri izomorf olsun. Başlangıçtaki iki çizge izomorf mudur?)

5. a) Gösteriniz ki $\mathbb{R}^3$ içinde 11 nokta verildiğinde herhangi ikisi kesişmeyen üç adet nokta üçlüsü bulunabilir öyle ki bu üçlülerden elde edilen üçgenlerin bir ortak noktası vardır.

b) Yukarıdaki önerme 10 nokta için doğru mudur?

6. K düzlemde (iki boyutlu) bir poligon, a bir vektör olsun öyle ki $K + a$ görüntüsü (a kadar ötelenmiş K) K 'yı kesmesin (diğer bir deyişle $K \cap (K + a) = \emptyset$). Gösteriniz ki K içindeki $|a|$ çaplı iki disk verildiğinde bunlar sürekli bir hareket altında K 'nın içinde kalacak ve hiç kesişmeyecek biçimde yer değiştiremezler.

7. Düzgün parametrelenenmiş bir $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ eğrisi düşünün öyle ki $\gamma(t)$ deki eğrilik t 'ye göre monoton azalan olsun.

a) γ üzerinde iki farklı noktadaki oskütör çemberlerinin kesişmediğini gösteriniz.

b) Aşağıda bir çelişkiyle sonuçlanan bir önermeler dizisi verilmiştir. Hatalı adımı bulunuz. $\gamma(1/2)$ noktasının bir komşuluğu eğrinin $\gamma(1/2)$ 'ye yakın noktalarındaki oskütör çemberleri tarafından folyanmıştır. O nedenle γ eğrisi bu lokal folyonun tüm yapraklarını keser. Fakat bu olanaksızdır, çünkü lokal olarak bu folyo segmentlerin bir çarpımıdır ve eğer γ tüm yapraklara teğet ise her yerde sıfıra eşit olan bir türevi vardır, dolayısıyla lokal olarak bu yapraklardan birisine eşit olacaktır, fakat γ lokal olarak bu folyonun bir çemberi değildir.

Kurallar & Koşullar

1. Olimpiyatlar 1 ve 31 Ekim tarihleri arasında yapılmaktadır (31 Ekim dahil). Ekipler 3 kişiden fazla olmamak üzere ekip çözümleri de kabul edilecektir. Her türlü materyal kullanılabilir. Ekip üyeleri dışında herhangi bir kişiden yardım almak yasaktır. Herhangi bir ödül yoktur. Bilinen çözümleri olmayan problemler mevcuttur. Kuralların tam listesini ve problemlerin en son versiyonunu (varsa düzeltmeler ve açıklamalarla birlikte)

<http://mathcenter.spb.ru/nikaan/olympiad/problems2018eng.pdf>

adresinde bulabilirsiniz.

2. Çözümlerin 31 Ekim'de 23:59'a kadar (Moskova saatiyle) teslim edilmesi gerekmektedir. Çözümleri e-posta ile nikaanspb@gmail.com adresine teslim ediniz. Konu satırında [topology olympiad] yazınız. Kurallar ve problemlerle ilgili sorular yine aynı adrese yazılmalıdır ve konu satırında konu adı yine aynı olmalıdır.

3. Sadece PDF formatındaki çalışmalar kabul edilecektir: ya $T_E X$ ten oluşturulmuş ya da el yazısı ile (**okunaklı**) yazılmış ve yüksek kaliteli taratılmış.

4. Katılım herkese açıktır. Lisans öğrencileri için ayrı bir kazananlar listesi olacaktır. Teslim ederken lütfen isminizi, çalışmayı yaptığınız yeri veya kurumu belirtiniz. Bu çözümleri teslim etmekle bu kişisel bilgilerin kullanılabileceğini ve analiz edilebileceğini kabul etmiş oluyorsunuz (olimpiyattan sonra sonuçları içeren bir tablo olacaktır). Eğer bu konuda rızanız yoksa bunu belirtiniz-anonim çalışmalar kabul edilecektir ancak buna pek sıcak bakılmamaktadır.

5) Eğer en az bir problem çözdü iseniz, lütfen isim belirtilmeyen [anketi](#) doldurunuz.

6) Sonuçlar <http://mathcenter.spb.ru/nikaan/olympiade.html> adresinde ilan edilecektir.

7) Olimpiyatı arkadaşlarınıza ve meslektaşlarınıza duyurabilir ve yayılmasına yardımcı olabilirsiniz, bu memnuniyetle karşılanacaktır. Daha fazla dile çeviriler <http://mathcenter.spb.ru/nikaan/olympiade.html> adresinde yer alacaktır.

8)İsviçre'de okuyan ilk üç yıl öğrencileri çözümlerini değerlendirilmek üzere Prof. Grigory Mikhalkin, Section de mathématiques (Battelle Villa), Université de, Genève, 1227 Carouge adresine yollanabilir. Mektup üzerindeki mührün tarihi 31 Ekim'den daha geç olmamalıdır.