



Department of Mathematics and Computer Science
@ St.Petersburg State University



Chebyshev Laboratory
@ St.Petersburg State University



Saint-Petersburg Topoloji Olimpiyatı, 1-31 Ekim 2019 Vladimir Abramovich Rokhlin'in (23.08.1919 - 3.12.1984) doğumunun 100. yılı anısına

Topoloji olimpiyatları 1 ve 31 Ekim tarihleri arasında yapılmaktadır. Ekipler 3 kişiden fazla olmamak üzere ekip çözümleri de kabul edilecektir. Her türlü materyal kullanılabilir. Ekip üyeleri dışında herhangi bir kişiden yardım almak yasaktır. Herhangi bir ödül yoktur. Problemler içinde bilinen çözümleri olmayanlar da mevcut olabilir. Kuralların tam listesini ve problemlerin en son versiyonunu (varsa düzeltmeler ve açıklamalarla birlikte)

<http://mathcenter.spb.ru/nikaan/olympiad/problems2019eng.pdf>

adresinde bulabilirsiniz.

1. Düzlemde, $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$ ile verilen açık diskten, $(0, \sqrt{\pi})^2$ ile verilen açık kareye türevlenebilir bir dönüşüm bulunabilir mi, öyle ki diskin merkezini, karenin $(1/3, 1/3)$ noktasına götürsün?

2. γ , a) bir çember b) düzlemde kapalı dış bükey herhangi bir eğri olsun. Yeterince küçük bir $a > 0$ sayısı alın ve γ üzerinde birbirine uzaklığı tam olarak a olan bütün noktaları bir doğru parçası ile birleştirin. Bu doğru parçalarının birleşiminin alanını hesaplayınız.

3. γ düzlemde periyodu $v \in \mathbb{R}^2$ olan (diğer bir deyişle $\gamma + v = \gamma$ eşitliğini sağlayan), kendi kendini kesmeyen, düzgün (sonsuz türevlenebilir) bir eğri olmak üzere, $\gamma + \lambda v$ nın γ ile kesişiminin her $\lambda \in \mathbb{R}$ için boş kümeden farklı olduğunu ispatlayınız.

4. v , üçgenlenmiş bir yüzeyin bir köşe noktası olsun. v 'nin "kusur"unu v 'yi köşe olarak kabul eden üçgenlerin sayısının 6 eksiği olarak tanımlayalım. Herhangi bir kareleme için (uzayın topolojik dörtgenlerle parçalanması), karelemeye ait bir köşe noktası v 'nin "kusur"unu da, v 'yi köşe olarak kabul eden dörtgenlerin sayısının 4 eksiği olarak tanımlayalım. Torus üzerinde bir üçgenleme (veya bir kareleme) verilmiş olsun.

a) Tüm köşelere ait kusurların toplamının sıfır olduğunu ispatlayınız.

b) Torus üzerinde kusur kümesi $(1, -1, 0, 0, \dots, 0)$ olan, yani kusuru ± 1 olan, sadece ve sadece iki köşesi bulunan ve diğer köşelerin sıfır kusurlu olduğu bir üçgenleme veya kareleme bulunamayacağını gösteriniz.

c) Kapalı ve g delikli bir yüzey üzerinde alınan herhangi bir üçgenleme veya karelemeye ait mümkün olabilecek kusur kümeleri nelerdir?

5. Bir çember üzerinde, n adet, $x_1, x_2, \dots, x_n$ noktalarının konfigürasyonlarından oluşan $X = (S^1)^n$ uzayını düşünelim.

a)

$$\Delta_1 = \{x \in X, x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid \exists i, x_i = x_{i+1}\}$$

olsun. $X \setminus \Delta_1$ 'in bağlantılı bileşenlerinin sayısını bulunuz. Diğer bir deyişle, S^1 üzerindeki endekslenmiş, ancak ardışık endeksli olanların hiçbir zaman aynı olmadığı n adet noktanın tüm konfigürasyonlarının oluşturduğu uzayın bağlantılı bileşenlerinin sayısını bulunuz.

b) Şimdi 1 ve n 'nci noktaları ardışık olarak düşünelim.

$$\Delta_2 = \{x \in X \mid x_1 = x_n \text{ veya } \exists i, x_i = x_{i+1}\}$$

olsun. $X \setminus \Delta_2$ 'in bağlantılı bileşenlerinin sayısını bulunuz.

6. Gösteriniz ki, $n \geq k$ olmak üzere $\mathbb{R}^k$ 'dan $\mathbb{R}^n$ 'e her düzgün gömmeyi, yine düzgün gömmeler aracılığıyla has (proper) bir gömmeye (diğer bir deyişle herhangi bir kompakt kümenin ters görüntüsünün de kompakt olduğu bir gömmeye) dönüştüren bir deformasyon vardır.

7. $F(x, y, z)$, derecesi 6 olan ve $\mathbb{R}P^2$ içinde $F(x, y, z) = 0$ denkleminin sonlu sayıda gerçel çözümünün olduğu homojen bir polinom olsun. Kaç adet çözüm mümkündür?
8. Şu önerme doğru mudur : $S^1 \times S^1$ 'den S^3 içine her düzgün gömme, S^3 'ü öyle iki parçaya ayırır ki bunlardan birisi $S^1 \times B^2$ 'ye (diğer bir deyişle bir çember ile iki boyutlu bir diskin çarpımına) homeomorf-tur?
9. Derecesi 4 olan öyle bir $F(x, y)$ polinomu bulunuz ki şu özellik sağlansın: $F(x, y) = 0$ denkleminin $\mathbb{R}^2$ içindeki çözüm kümesi kapalı, kendi kendilerini kesmeyen ve biri diğerinin içinde olan iki eğridir. (Burada bir eğrinin diğerinin içinde olmasından şu anlaşılmalıdır: Büyük olan eğri $\mathbb{R}^2$ içinde bir disk sınırlamaktadır ve küçük eğri o diskin içinde bulunmaktadır.)
10. a) Düzlemde sonlu sayıda üçgenler verilmiş olsun (birbirlerini kesiyor olabilirler) öyle ki düzlemdeki her doğru parçası çift sayıda üçgenin kenarı olsun (doğru parçalarının “çoğu” için bu çift sayı sıfırdır). Herhangi bir kenar üzerinde bulunmayan her noktanın çift sayıda üçgenin içinde bulunduğunu gösteriniz.
- b) Düzlemde belli sayıda öyle üçgenler verilmiş olsun ki her kare sadece sonlu sayıda üçgeni kesebilsin. Düzlemde her doğru parçasının çift sayıda üçgenin kenarı olduğu (doğru parçalarının “çoğu” için bu çift sayı sıfırdır) ve ayrıca bir ve yalnız bir üçgenin içinde bulunan bir noktanın var olduğu biliniyor olsun. Düzlemdeki her noktanın en az bir üçgenin içinde bulunduğunu kanıtlayınız.

Kurallar

1. Topoloji olimpiyatları 1 ve 31 Ekim tarihleri arasında yapılmaktadır. Ekipler 3 kişiden fazla olmamak üzere ekip çözümleri de kabul edilecektir. Her türlü materyal kullanılabilir. Ekip üyeleri dışında herhangi bir kişiden yardım almak yasaktır. Herhangi bir ödül yoktur. Problemler içinde bilinen çözümleri olmayanlar da mevcut olabilir. Kuralların tam listesini ve problemlerin en son versiyonunu (varsa düzeltmeler ve açıklamalarla birlikte)

<http://mathcenter.spb.ru/nikaan/olympiad/problems2019eng.pdf>

adresinde bulabilirsiniz.

2. Çözümlerin 31 Ekim'de 23:59'a kadar (Moskova saatiyle) teslim edilmesi gerekmektedir. Çözümleri e-posta ile nikaanspb@gmail.com adresine teslim ediniz. Konu satırında [topology olympiad] yazınız. Kurallar ve problemlerle ilgili sorular yine aynı adrese yazılmalıdır ve konu satırında konu adı yine aynı olmalıdır.

3. Sadece PDF formatındaki çalışmalar kabul edilecektir: ya $\text{\TeX}$ ten oluşturulmuş ya da el yazısı ile (**okunaklı**) yazılmış ve **yüksek** kaliteli taratılmış.

4. Katılım herkese açıktır (lise öğrencilerinden emekli profesörlere kadar). Lisans öğrencileri için ayrı bir kazananlar listesi olacaktır. Teslim ederken lütfen isminizi, çalışmayı yaptığınız yeri veya kurumu belirtiniz. Bu çözümleri teslim etmekle bu kişisel bilgilerin kullanılabileceğini ve analiz edilebileceğini kabul etmiş oluyorsunuz (olimpiyattan sonra sonuçları içeren bir tablo olacaktır). Eğer bu konuda rızanız yoksa bunu belirtiniz-anonim çalışmalar kabul edilecektir ancak buna pek sıcak bakılmamaktadır.

5. Eğer en az bir problemi çözdü iseniz, lütfen isim belirtilmeyen anketi ([anonymous query](#))doldurunuz. Beğendiğiniz topoloji problemlerinizi gelecek olimpiyatlar için göndermekten çekinmeyiniz.

6. Sonuçlar <http://mathcenter.spb.ru/nikaan/olympiade.html> adresinde ilan edilecektir.

7. Olimpiyatı arkadaşlarınıza ve meslektaşlarınıza duyurabilir ve yayılmasına yardımcı olabilirsiniz, bu memnunlukla karşılanacaktır. Daha fazla dile çeviriler <http://mathcenter.spb.ru/nikaan/olympiade.html> adresinde yer alacaktır.

8. İsviçre'de okuyan ilk üç yıl düzeyindeki lisans öğrencileri, çözümlerini değerlendirilmek üzere Prof. Grigory Mikhalkin, Section de mathématiques (Battelle Villa), Université de, Genève, 1227 Carouge adresine yollayabilirler. Mektup üzerindeki mührün tarihi 31 Ekim'den daha geç olmamalıdır.